

revisione  
05 novembre 2022

# Radici dei Polinomi in $\mathbb{R}$ di 3° e di 4° grado di una variabile -

La Teoria di J. Sylvester del Discriminante

claudio magno  
[www.cm-physmath.net](http://www.cm-physmath.net)





*Niccolò Fontana (Tartaglia) (1500-1557)*

## INDICE

<b>INTRODUZIONE</b>	P. III
RADICI DEL POLINOMIO DI 3° GRADO DI UNA VARIABILE (METODO DI TARTAGLIA – CARDANO – EULER)	P. 1
RADICI DEL POLINOMIO DI 4° GRADO DI UNA VARIABILE (METODO DI FERRARI – EULER)	P. 7
IL DISCRIMINANTE DI UN POLINOMIO DI UNA VARIABILE (TEORIA DI J. SYLVESTER)	P. 10
<b>APPENDICE</b>	P. 14
IL PROBLEMA GENERALE DEL CALCOLO DELLE RADICI DI UN POLINOMIO DI UNA VARIABILE	

## INTRODUZIONE (†)

Il carattere sintetico della Geometria Analitica, che pervade la formazione Secondaria Superiore, proviene, in larga parte, dallo studio sistematico della funzione polinomiale di 2° grado in  $\mathbb{R}$ ,  $x \mapsto y = P_{(2)}(x) \equiv ax^2 + bx + c$ . In esso, un'importanza cruciale riveste la conoscenza degli zeri (nel campo complesso  $\mathbb{C}$ ) di  $P_{(2)}$ , sempre rappresentabili *in forma chiusa mediante radicali*.

Riguardo alle equazioni di 3° grado in  $\mathbb{R}$ , una forma chiusa mediante radicali è ancora possibile in certi casi grazie a una sostituzione brillante di Niccolò Fontana (il 'Tartaglia'). Questa, però, va affiancata al *metodo goniometrico*, più generale, di François Viète, l'unico praticabile quando si incappi nel 'casus irreducibilis'. Il metodo di Viète, in quanto metodo *goniometrico*, adombra la rappresentazione *piano-polare* tipica in  $\mathbb{C}$ .

La determinazione delle quattro radici in forma chiusa del polinomio di 4° grado in  $\mathbb{R}$  richiede, per quanto è noto a tutt'oggi, il ricorso a un'equazione *risolvente cubica*. Tra i vari procedimenti escogitati nel corso del tempo, mi pare che quello di L. Euler (sempre Lui, manco a dirlo ...) sia il più semplice, 'pulito' e facilmente programmabile. È quello esposto qui dettagliatamente.

Malgrado i tentativi successivi di altri 'grandi' (soprattutto Lagrange, Gauss e Legendre), l'assalto al polinomio generale in  $\mathbb{R}$  di 5° grado nella ricerca delle sue radici in forma chiusa mediante radicali porta dritti a sbattere contro l'*irrisolvibilità* inesorabile, per  $n \geq 5$ , del gruppo polinomiale  $S_n$ , nel senso della Teoria di Galois. Questo mette fine bruscamente e in modo *definitivo* alla ricerca delle radici in forma chiusa mediante radicali per il polinomio *generale* di grado  $n \geq 5$ . La riuscita *accidentale* di qualche combinazione di coefficienti *non risolve* il problema.

Mi auguro che questo math-notebook possa riempire, almeno a livello applicativo elementare, il gap causato dal confinamento di tale tema algebrico tra le 'curiosità storiche marginali', apprezzamento dietro cui si nasconde, talvolta, un uso primordiale e, in buona sostanza, indifferente dei programmi di calcolo. Il ricorso all'*arte* dell'Analisi Numerica resta sempre l'ultima spiaggia (anche se, il più delle volte, inevitabile) ma non ci si dovrebbe mai dimenticare delle parole di R. W. Hamming, il grande analista numerico: 'The purpose of computing is insight, not numbers ...'.

C M

---

(†) Un riferimento attendibile, documentato, sintetico, assolutamente da leggere sull'evoluzione storica della Matematica resta il lavoro: KLINE, M., *Storia del pensiero matematico [Mathematical Thought from Ancient to Modern Times]*, VOLL. I & II, EINAUDI (1999).

## Radici del polinomio in $\mathbb{R}$ di 3° grado di una variabile (metodo di Tartaglia-Cardano-Euler)

La funzione polinomiale di 3° grado in *una* variabile e a coefficienti  $\in \mathbb{R}$ ,

$$x \mapsto P_{[3]}(x) := \sum_{n=0}^3 a_n x^{3-n},$$

richiede che, come tale, sia *necessariamente*  $a_0 \neq 0$ . Inoltre, in quanto segue, si assuma, anche,  $a_3 \neq 0$ , i.e., trascurando il caso elementare della radice  $x \equiv 0$  di  $P'_{[3]}(x)$ .

Pertanto, con  $\{a_0, a_1, a_2, a_3\} \in \{\mathbb{R} \setminus \{0\}\} \times \mathbb{R}^2 \times \{\mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ , si ponga l'equazione  $P_{[3]}(x) = 0$  in *forma monica* (o *normale* vs. il primo coefficiente, i.e., con  $a_0 \equiv 1$ ), scrivendo

$$P_{[3]}(x)/a_0 \equiv H(x) := x^3 + \eta_1 x^2 + \eta_2 x + \eta_3 = 0, \quad (1)$$

dove,  $\eta_j := a_j/a_0$  ( $j \in \{1, 2, 3\}$ ). Osservato che le radici di  $H(x)$  sono le *stesse* di  $P_{(3)}(x)$ , si esegua la trasformazione affine, detta *a radici traslate*,

$$x := \xi - \eta_1/3, \quad (2)$$

con il quale, l'Eq. (1) si trasforma in un'equazione cubica in forma *canonica*, i.e., sia *monica* che *priva del monomio di 2° grado*:

$$H(x) \mapsto f(\xi) := \xi^3 + p\xi + q, \quad (3)$$

nella quale, sono definiti i parametri (cf/c Eq.i (9) e (11))

$$p := -\frac{\eta_1^2}{3} + \eta_2 \equiv \frac{a_2}{a_0} - \frac{a_1^2}{3a_0^2} = \left. \frac{dH(x)}{dx} \right|_{x=\bar{x}} \equiv \frac{1}{a_0} \left. \frac{dP_{[3]}(x)}{dx} \right|_{x=\bar{x}}, \quad (4.1)$$

$$q := \frac{2\eta_1^3}{27} - \frac{\eta_1\eta_2}{3} + \eta_3 \equiv \frac{27a_0^2a_3 - 9a_0a_1a_2 + 2a_1^3}{27a_0^3} \equiv H(\bar{x}) \equiv \frac{1}{a_0} P_{[3]}(\bar{x}). \quad (4.2)$$

Poi, trascurato il caso banale  $q = 0$ , per il quale l'Eq. (3) ha soluzione immediata, e introdotte le nuove variabili complementari  $u$  e  $v$  attraverso la definizione bi-lineare

$$\xi := u + v, \quad (5)$$

si passa dall'Eq. (3) all'equazione polinomiale *binaria*

$$f(\xi) \mapsto F(u, v) := u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0. \quad (6)$$

Nell'ipotesi non-banale  $q \neq 0$ , l'annullamento di  $F(u, v)$  *non può* implicare  $u = -v$ . Quindi, l'Eq. (6) corrisponde alla determinazione delle soluzioni del *sistema risolvete*

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -p/3 \end{cases}. \quad (7)$$

Elevando al cubo i membri della seconda delle Eq. (7), si ottiene il sistema *simmetrico* associato

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3 v^3 = -p^3/27 \end{cases}, \quad (8)$$

dal quale, si osserva che le componenti del vettore(-riga)  $(u^3, v^3)$  corrispondono alle soluzioni

dell'equazione *Risolvente Quadratica*

$$t^2 + qt - p^3/27 = 0. \quad (9)$$

Il vettore(-colonna) delle soluzioni dell'Eq. (9) è dato da

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u^3 \\ v^3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -q/2 + \bar{\Omega}^{1/2} \\ -q/2 - \bar{\Omega}^{1/2} \end{pmatrix}; \quad (10)$$

inoltre, nella *Teoria delle Equazioni Algebriche*,

$$\bar{\Omega} := \frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} \equiv \frac{27a_0^2 a_3^2 - 18a_0 a_1 a_2 a_3 + 4a_0 a_2^3 + 4a_1^3 a_3 - a_1^2 a_2^2}{108 a_0^4} \equiv \frac{\Omega}{108 a_0^4}, \quad (11)$$

rappresenta il **discriminante ridotto** dell'Eq. *quadratica* (9), ovvero, dell'Eq. canonica *cubica* (1). La scrittura  $\bar{\Omega}^{1/2}$  indica *l'uno o l'altro* ( $\surd$ ) dei *due* numeri complessi, il quadrato dei quali, è il numero  $\bar{\Omega} \in \mathbb{C}$ . Nel procedimento di calcolo, tale scelta è sia *esclusiva* che *definitiva*.

Quindi, combinando l'Eq. (10) con la posizione risolvente (5), le soluzioni dell'Eq. (3) possono essere rappresentate, in  $\mathbb{C}$ , nella forma ( $\bar{\Omega} \in \mathbb{R}$ , chiaramente)

$$\xi = (\bar{\Omega}^{1/2} - q/2)^{1/3} - (\bar{\Omega}^{1/2} + q/2)^{1/3} \equiv u_j + v_k, \quad (12)$$

con  $\{j, k\} \subset \{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\}$ .

D'altra parte, nel passaggio dal sistema risolvente (7) a quello associato (8), l'elevamento al cubo dei membri dell'equazione  $uv = -p/3$  introduce 6 valori *estranei* tra i  $3^2 = 9$  generabili con l'Eq. (12), accoppiando, in tutti i modi possibili, le 3 soluzioni di ciascun radicale cubico con le 3 soluzioni dell'altro. L'eliminazione di questi valori estranei si esegue facilmente, imponendo la condizione iniziale  $uv = -p/3 \in \mathbb{R}$ . □

Circa la natura delle radici delle Eq.i (1) o (3) è presentato nel math-notebook: **Uno studio della Funzione Polinomiale Cubica generale a coefficienti in  $\mathbb{R}$** , nel quale, viene fornito qualche dettaglio in più che, però, nella sostanza, ripercorre quanto esposto qui di seguito.

Prima di tutto, si calcolano, dall'espressione di  $f(\xi)$ ,

$$\begin{cases} f'(\xi) = 3\xi^2 + p \\ f''(\xi) = 6\xi \\ f'''(\xi) = 6 > 0, \quad \forall \xi \end{cases}.$$

Quindi, rispetto ai parametri  $p$  e  $q$ ,  $f(\xi)$  rappresenta una famiglia doppiamente infinita di curve cubiche definite ovunque in  $\mathbb{R}$ , tutte dotate di un *unico* punto,  $(0; q)$ , di flesso *ascendente*.

Inoltre, dal controllo di  $f'(\xi)$ , si distinguono tre casi:

- $p > 0$ .

Risulta  $\bar{\Omega} > 0$ . Poiché  $f(\xi)$  è crescente ovunque, il suo grafico interseca l'asse  $X$  delle ascisse una sola volta, determinando l'immagine dell'*unica* radice reale,  $\xi_0$ , dell'Eq. (3);

- $p = 0$ .

$f(\xi)$  è crescente, risultando stazionaria solo per  $\xi = 0$ , dove presenta un punto di flesso

a tangente orizzontale. La radice reale,  $\xi_0$ , può essere *semplice* o *tripla* (in quest'ultimo caso, è  $\xi_0 \equiv 0$ ) secondo che  $\bar{\Delta} > 0 \vee \bar{\Delta} = 0$ , i.e.,  $q \neq 0 \vee q = 0$ ;

- $p < 0$ .

$f(\xi)$  è dotata di due estremi locali, in corrispondenza delle ascisse  $\xi = \pm |p/3|^{1/2}$ . Da queste, si calcolano le ordinate, rispettivamente, del *massimo locale*

$$M \equiv f(-|p/3|^{1/2}) = q + 2|p/3|^{2/3}$$

e del *minimo locale*

$$m \equiv f(|p/3|^{1/2}) = q - 2|p/3|^{2/3}.$$

Tali estremi risultano, evidentemente e senza eccezioni, simmetrici rispetto all'ordinata  $q$  del punto di flesso ascendente, con  $M > m$ .

Ora, il segno del prodotto  $Mm = 4(p^3/27 + q^2/4) \equiv 4\bar{\Delta}$  indica che,

- se  $\bar{\Delta} < 0$ ,

allora,  $M$  e  $m$  posseggono segni discordi e, pertanto, l'Eq. (3) possiede *tre* soluzioni *reali e distinte*,  $\xi_0 < \xi_1 < \xi_2$ ;

- se  $\bar{\Delta} = 0$ ,

allora,  $M \equiv 0 \wedge m < 0 \vee m \equiv 0 \wedge M > 0$ . Da ciò, segue che l'Eq. (3) possiede *tre* soluzioni *reali*, delle quali, *almeno due* risultano *coincidenti*;

- se  $\bar{\Delta} > 0$ ,

allora,  $M$  e  $m$  hanno segni concordi e, pertanto, l'Eq. (3) possiede *una sola* soluzione reale,  $\xi_0$ , quindi, le altre due sono *complesse coniugate*.

Verifiche grafiche elementari confermano gli asserti precedenti.

□

Riepilogando i vari casi possibili rispetto al segno di  $\bar{\Delta}$ , si conclude che

- se  $\bar{\Delta} > 0$ , l'Eq. (3) ha *una sola* soluzione  $\in \mathbb{R}$ . Le altre due  $\in \mathbb{C}$  e sono coniugate;
- se  $\bar{\Delta} = 0$ , l'Eq. (3) ha *tre* soluzioni  $\in \mathbb{R}$ , delle quali, *almeno due* coincidono;
- se  $\bar{\Delta} < 0$ , l'Eq. (3) ha *tre* soluzioni  $\in \mathbb{R}$  e distinte.

Per i casi in cui  $\bar{\Delta} \geq 0$ , le rappresentazioni algebriche delle soluzioni  $\xi_k$ , con  $k \in \{0, 1, 2\}$ , si generano direttamente dall'Eq. (12).

Infatti, poiché  $\{u^3, v^3\} \subset \mathbb{R}$ , allora, assegnato  $\{u^3, v^3\} \equiv \{u_0^3, v_0^3\} \subset \mathbb{R}$ , si ottengono i vettori delle radici cubiche in  $\mathbb{C}$

$$(u^3)^{1/3} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u_0 \\ -(1 - i3^{1/2})u_0/2 \\ -(1 + i3^{1/2})u_0/2 \end{pmatrix}, \quad (v^3)^{1/3} = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} v_0 \\ -(1 - i3^{1/2})v_0/2 \\ -(1 + i3^{1/2})v_0/2 \end{pmatrix}.$$

Da questi, ricordando la condizione iniziale  $uv = u_r v_s = -p/3 \in \mathbb{R}$ , si scrive subito il vettore

complesso delle soluzioni dell'Eq. (3):

$$\xi \equiv \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 + v_0 \\ -(u_0 + v_0)/2 + i(3^{1/2}/2)(u_0 - v_0) \\ -(u_0 + v_0)/2 - i(3^{1/2}/2)(u_0 - v_0) \end{pmatrix}. \quad (13)$$

□

Come si è osservato, le tre soluzioni *reali* corrispondono proprio al caso in cui, essendo  $\bar{\Omega} \leq 0$ , i radicandi *cubici* nell'Eq. (12) *non* sono reali! A tutt'oggi, non è noto alcun algoritmo *puramente algebrico* che, iniziando dall'Eq. (12), fornisca una forma esatta delle soluzioni  $\xi_k$ . Tale paradosso, scoperto da TARTAGLIA (NICCOLÒ FONTANA, 1499-1557), è conosciuto come *casus irreducibilis*. Così, la rappresentazione *goniometrica* dell'Eq. (12) – *sempre* costruibile con la formula classica di DE MOIVRE (ABRAHAM, 1667-1754) per la determinazione delle radici  $n$ -sime in  $\mathbb{C}$  – resta l'unica forma chiusa *nota* per il calcolo delle tre radici dell'Eq. (3) quando sono *reali*, i.e., quando  $\bar{\Omega} < 0$ . Un procedimento goniometrico alternativo diretto delle tre radici *reali* può essere eseguito mediante l'applicazione in  $\mathbb{R}$  della trasformazione piano-polare

$$\xi := \rho \cos \varphi, \quad (14)$$

( $\rho > 0$ ). Benché meno immediato, questo metodo, originato (1594) da un'osservazione di VIÈTE (FRANÇOIS, 1540-1603), evita, appunto, il ricorso a quantità complesse.

Si sostituisca l'espressione (14) di  $\xi$  nell'Eq. (3), tenendo presente, dall'Eq. (11), l'implicazione specifica  $\bar{\Omega} < 0 \Rightarrow p < 0$  (l'implicazione opposta è *falsa*!). Si ha

$$\rho^3 (\cos \varphi)^3 + p \rho \cos \varphi + q = 0. \quad (15)$$

Ora, l'identità di *triplicazione* goniometrica

$$\cos(3\varphi) \equiv 4(\cos \varphi)^3 - 3\cos \varphi$$

può essere riscritta nella forma

$$4(\cos \varphi)^3 - 3\cos \varphi - \cos(3\varphi) \equiv 0. \quad (16)$$

Se esistono valori di  $\varphi$  che, soddisfacendo l'Eq. (15), generano le soluzioni dell'Eq. (3) attraverso la trasformazione (14), essi soddisfano certamente l'Idn. (16), valida  $\forall \varphi$ . In questa circostanza, le rappresentazioni (15) e (16) risultano, almeno, *proporzionali* tra loro, i.e., sussistono le uguaglianze *simultanee* seguenti:

$$\rho^3/4 = -p\rho/3 = -q/\cos(3\varphi),$$

equivalenti, per  $\rho > 0$ , al sistema

$$\begin{cases} \rho^2 = -4p/3 \\ \cos(3\varphi) = 3q/(p\rho) \end{cases}. \quad (17)$$

Pertanto, nel *casus irreducibilis*, si ha  $p < 0$  e il sistema (17) può essere riscritto esplicitando sia  $\rho$  che  $\cos(3\varphi)$  in modo un po' più significativo vs. i parametri  $p$  e  $q$  (si noti che  $q \leq 0$ ):

$$\begin{cases} \rho = 2(|p|/3)^{1/2} \\ \cos(3\varphi) = 3^{3/2}(-q)/(2|p|^{3/2}) \end{cases}. \quad (17.1)$$



Poi, dal sistema (17.1), con  $p < 0 \wedge \bar{\Delta} \equiv p^3/27 + q^2/4 < 0$ , si vede che  $27q^2/(4|p|^3) \in (0,1)$ , dalla quale, si ottiene la condizione di *irriducibilità*:

$$27q^2 \equiv 3^3 |\pm q|^2 < 4|p|^3. \quad (17.2)$$

Invertendo la seconda delle Eq. (17.1) nell'intervallo principale di *determinazione* della funzione  $\cos^{-1}$ , i.e., per  $\varphi \in [0, \pi]$ , e semplificando, si scrive,

$$\varphi = \frac{1}{3} \left( \cos^{-1} \left( \frac{3^{3/2}(-q)}{2|p|^{3/2}} \right) + 2k\pi \right), \quad (18)$$

con  $k \in \mathbb{Z}$ . Le espressioni finali *distinte* di  $\varphi$  appaiono dipendere sia da  $\text{sgn}(q)$  che da  $k$ .

Una terna *qualsiasi* di indici interi relativi *consecutivi*,  $\{k-1, k, k+1\}$ , è sufficiente, in generale, per ricavare le tre soluzioni dell'Eq. (3) mediante l'Eq. (14). Ad esempio, si può assegnare la terna *simmetrica*  $\{k: k = -1, 0, 1\}$ .

Quindi, combinando l'Eq. (18) e la prima delle Eq.i (17) nell'Eq. (14) e ricordando che la funzione  $\cos$  è *pari* (ciò rende ininfluyente  $\text{sgn}(q)$  sul valore di  $\cos \varphi$ ), si scrivono le soluzioni  $\xi_k$  *distinte* cercate in forma univoca e compatta ( $k = -1, 0, 1$ ):

$$\xi_k = 2 \left| \frac{p}{3} \right|^{1/2} \cos \left( \frac{1}{3} \cos^{-1} \left( \frac{3^{3/2}(-q)}{2|p|^{3/2}} \right) + \frac{2}{3} k\pi \right), \quad (19)$$

$\forall \bar{\Delta} \in \mathbb{R}^-$ .

Nel caso in cui  $\bar{\Delta} = 0$ , si è visto che l'Eq. (3) possiede *tre* soluzioni  $\in \mathbb{R}$ , delle quali, *almeno due* coincidono. Le Eq.i (13) forniscono quella in cui *non compare* l'unità immaginaria:

$$\xi_0 = 2^{2/3} (-q)^{1/3} \equiv -\frac{2^{2/3}}{3a_0} (27a_0^2 a_3 - 9a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3)^{1/3}. \quad (19.1)$$

Le altre due soluzioni si determinano come radici del polinomio-quotiente *quadratico*

$$Q_{[2]}(\xi) := \frac{f(\xi)}{\xi - \xi_0}, \quad (19.2)$$

*entrambe*  $\in \mathbb{R}$  o, più in generale, coniugate in  $\mathbb{C}$ .

□

Infine, le soluzioni  $x_k$  dell'equazione  $P_{[3]}(x) = 0$ , ovvero, dell'Eq. monica (1), si ricostruiscono dalla traslazione (2) mediante le Eq.i (13) o (19) o (20), secondo il segno di  $\bar{\Delta}$ :

$$x_k = \xi_k - \frac{\eta_1}{3} \equiv \xi_k - \frac{a_1}{3a_0}. \quad (20)$$

■

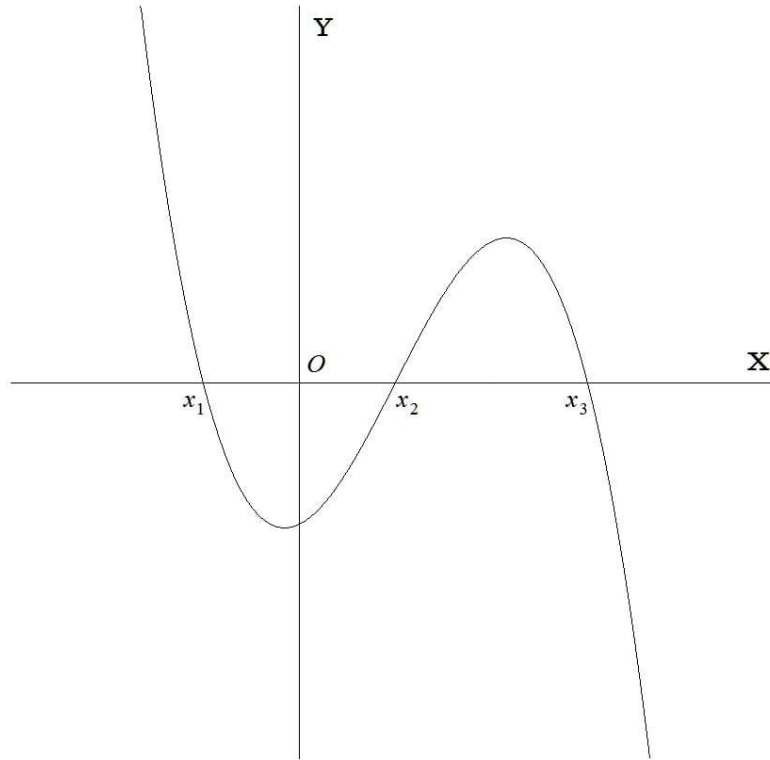


Fig.1 – Grafico qualitativo di  $x \mapsto P_{[3]}(x)$ , con  $a_0 < 0$  e 3 radici  $\in \mathbb{R}$  distinte.

## Radici del polinomio in $\mathbb{R}$ di 4° grado di una variabile (metodo di Ferrari-Euler-Lagrange-Legendre)

Le radici – in generale, *complesse* – della funzione-polinomio in *una* variabile in  $\mathbb{R}$ ,

$$x \mapsto P_{[4]}(x) := \sum_{n=0}^4 a_n x^{4-n},$$

nella quale, sia, necessariamente,  $a_0 \neq 0$ , sono, ovviamente, le stesse della sua rappresentazione *monica*, i.e., quelle del polinomio

$$P_{[4]}(x)/a_0 \equiv C(x) := x^4 + c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4, \quad (21)$$

dove,  $c_j := a_j/a_0$  ( $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ ).

Anche qui, con la trasformazione affine *a radici traslate*

$$x := \xi - c_1/4, \quad (22)$$

l'Eq. (21) diventa l'espressione di un polinomio di 4° grado, nella variabile  $\xi$ , in forma *canonica*, i.e., sia *monica* che *priva* del monomio di 3° grado,

$$C(x) \mapsto B(\xi) := \xi^4 + b_2 \xi^2 + b_3 \xi + b_4, \quad (23)$$

definendo i coefficienti

$$\left. \begin{aligned} b_2 &:= -3c_1^2/8 + c_2 \\ b_3 &:= c_1^3/8 - c_1 c_2/2 + c_3 \\ b_4 &:= -3c_1^4/256 + c_1^2 c_2/16 - c_1 c_3/4 + c_4 \end{aligned} \right\}. \quad (24)$$

Ora, poiché  $\{b_2, b_3, b_4\} \subset \mathbb{R}$ , è *sempre* possibile fattorizzare di  $B(\xi)$  in  $\mathbb{R}$  nel prodotto di due trinomi-divisori opportuni di 2° grado in  $\xi$ . Tale procedura, perfezionata da EULER (LEONHARD, 1707-1783) e da LAGRANGE (JOSEPH-LOUIS, 1736-1813) ma intravisto, in precedenza, da FERRARI (LODOVICO, 1522-1565), trasforma  $B(\xi)$  in un polinomio *puri*, i.e., privo delle potenze dispari di  $\xi$  e, pertanto, dotato *solo* di due coppie di radici *simmetriche* vs. l'origine (complessa) traslata.

Si inizia verificando *costruttivamente* l'esistenza della *terna parametrica risolvente*  $\{z, s, t\} \subset \mathbb{C}$  che scompone  $B(\xi)$  nel prodotto *antisimmetrico* vs.  $z$  di due polinomi quadratici:

$$\begin{aligned} B(\xi) &:= (\xi^2 - z\xi + s)(\xi^2 + z\xi + t) \\ &\equiv \xi^4 + (s+t-z^2)\xi^2 + (s-t)z\xi + st. \end{aligned} \quad (25)$$

- Se  $b_3 = 0$ , l'Eq. (23) si riduce a forma bi-quadratica, i.e., nell'Eq. (25), è  $(s-t)z \equiv 0$ . Circa le *opzioni parametriche* alternative *ammissibili*  $z = 0 \vee s = t$ , la prima corrisponde, in modo conveniente, alla coppia  $\{-s, -t\} \subset \mathbb{C}$  dei valori *quadratici* delle due coppie di soluzioni *opposte* – reali o complesse – dell'equazione

$$\begin{aligned} 0 = B(\xi) &\equiv \xi^4 + b_2 \xi^2 + b_4 \\ &\equiv \xi^4 + (s+t)\xi^2 + st; \end{aligned} \quad (26)$$

- altrimenti, se  $b_3 \neq 0$ , dal confronto tra le Eq.i (25) e (23), ciò implica che sia  $z \neq 0$  e, quindi, che valga il sistema

$$\begin{cases} s + t = z^2 + b_2 \\ s - t = b_3/z \\ st = b_4 \end{cases} . \quad (27)$$

Sommando membro a membro la prima alla seconda delle Eq.i (27), si ottiene

$$s = \frac{1}{2} \left( z^2 + b_2 + \frac{b_3}{z} \right) \equiv s(z), \quad (28)$$

mentre, sottraendo membro a membro la seconda dalla prima delle Eq.i (27), risulta

$$t = \frac{1}{2} \left( z^2 + b_2 - \frac{b_3}{z} \right) \equiv t(z) \equiv s(-z). \quad (29)$$

Le Eq.i (28) e (29) mostrano la dipendenza dei parametri  $s$  e  $t$  dal parametro  $z \neq 0$ . Ora, se si introducono le espressioni esplicite  $s(z)$  e  $t(z)$  nella terza equazione del sistema (27), si determina l'equazione  $z$ -risolvente, equivalente al sistema stesso:

$$st \equiv s(z)s(-z) = \frac{1}{4} \left( (z^2 + b_2)^2 - \left( \frac{b_3}{z} \right)^2 \right) = b_4,$$

ovvero, in forma di equazione  $z$ -polinomiale parametrica, studiata anche da Lagrange,

$$\psi(z) := z^6 + 2b_2z^4 + (b_2^2 - 4b_4)z^2 - b_3^2 = 0. \quad (30)$$

Valendo il Teorema Fondamentale dell'Algebra,  $\exists$  6 terne parametriche  $\{z_n, s(z_n), s(-z_n)\} \in \mathcal{C}$  ( $n \in \{1, 2, \dots, 6\}$ ) costruibili con le 6 radici  $z_n \in \mathcal{C}$  di  $\psi(z)$ . Queste, però, fanno corrispondere identicamente le rappresentazioni (23) e (25) dell'equazione  $B(\xi) = 0$  solo in 3 modi distinti. Infatti,  $\psi(-z) \equiv \psi(z)$  poiché  $\psi$  è una funzione pari. Quindi, basta conoscere una qualsiasi di queste radici – la si indichi come  $z_\nu$  – per ricondurre l'equazione  $B(\xi) = 0$  nella rappresentazione (25) alla risoluzione elementare di due equazioni quadratiche in  $\mathcal{C}$ ; in pratica, conviene scegliere  $z_\nu$  come quella radice dotata della forma numerica più semplice.

Pertanto, il cambiamento di variabile  $w := z^2$  trasforma l'Eq. (30) nella forma monica, nota come la Risolvente Cubica di Euler,

$$K(w) := w^3 + \kappa_1 w^2 + \kappa_2 w + \kappa_3 = 0. \quad (31)$$

Le espressioni dei coefficienti  $\kappa_\nu \in \mathbb{R}$  ( $\nu \in \{1, 2, 3\}$ ), in termini dei coefficienti  $c_j$  nell'Eq. (21) originaria, sono riportate qui di seguito. Esse sono ottenute mediante le definizioni (24):

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1 &:= 2b_2 = -3c_1^2/4 + 2c_2 \\ \kappa_2 &:= b_2^2 - 4b_4 \equiv \kappa_1^2/4 - 4b_4 = 3c_1^4/32 - c_1^2c_2/2 - c_1c_3 + c_2^2 + 4c_4 \\ \kappa_3 &:= -b_3^2 = -(c_1^3/8 - c_1c_2/2 + c_3)^2 \end{aligned} \right\} . \quad (32)$$

L'Eq. (31) può essere risolta con il metodo di Tartaglia-Cardano-Euler discusso inizialmente e costituisce dell'equazione risolvente del sistema (27). Poiché  $\{\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3\} \subset \mathbb{R}$ , una o tre soluzioni  $w_\nu$  dell'Eq. (31) appartengono a  $\mathbb{R}$ .

Ora, se  $z_v$  è un elemento della coppia  $\{\pm w_v^{1/2}\}$  di numeri *opposti* ( $w_v \in \mathbb{R} \iff z_v \in \mathbb{R} \vee I$ ) e lo si sostituisce nell'Eq. (29), si verifica che  $t(z_v) \equiv s(-z_v)$ . Pertanto, si determinano facilmente le soluzioni dell'Eq. (25), predisposta nella forma fattorizzata bi-trinomiale, *antisimmetrica* vs.  $z_v$ ,

$$B(\xi) = (\xi^2 - z_v \xi + s(z_v))(\xi^2 + z_v \xi + s(-z_v)) = 0. \quad (33)$$

Nella *rappresentazione di Euler-Legendre*, esse si scrivono esplicitamente

$$\begin{cases} \xi_{1,2} = \frac{z_v}{2} \pm \left( -\frac{b_3}{2z_v} - \frac{b_2}{2} - \frac{z_v^2}{4} \right)^{1/2} \\ \xi_{3,4} = \frac{z_v}{2} \pm \left( \frac{b_3}{2z_v} - \frac{b_2}{2} - \frac{z_v^2}{4} \right)^{1/2} \end{cases}. \quad (34)$$

□

Infine, le quattro radici del polinomio  $C(x)$  – *identiche* a quelle di  $P_{[4]}(x)$  – si ottengono dalle Eq.i (34) e, a ritroso, (24), mediante la traslazione (22),

$$x_j = \xi_j - \frac{c_1}{4} \equiv \xi_j - \frac{a_1}{4a_0}, \quad (35)$$

assegnando, rispettivamente,  $j = 1, 2, 3, 4$ .

È quasi superfluo osservare che, nelle applicazioni, salvo casi *fortuitamente semplici*, convenga *sempre* ricorrere al calcolo *numerico* (approssimato) delle  $x_j$  o, quanto meno, a una loro verifica.

La programmazione delle formule necessarie è elementare. ■

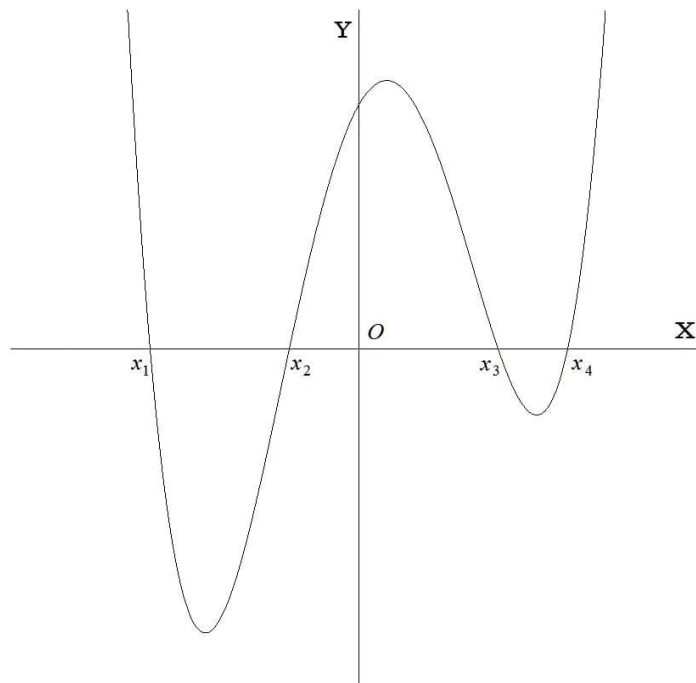


Fig.2 – Grafico qualitativo di  $x \mapsto P_{[4]}(x)$ , con  $a_0 > 0$  e 4 radici  $\in \mathbb{R}$  distinte.

## Il Discriminante di un polinomio di una variabile

(Teoria di J. Sylvester)

Considerata l'equazione polinomiale generale  $P_{[n]}(x) = 0$ , con  $n \geq 2$ , il *discriminante* di questa è un parametro convenzionale, costruito con gli  $n + 1$  coefficienti di  $P_{[n]}(x)$  (in forma completa), che, almeno per  $n = 2, 3$ , non solo distingue – discrimina – le *soluzioni* dell'equazione secondo la loro natura *reale* o *complessa* e la loro *distinzione* o *coincidenza* ma, anche, concorre in modo decisivo al calcolo esplicito delle soluzioni stesse.

Se  $n \geq 4$ , il significato e l'utilità operativa del *discriminante* si riducono drasticamente. Infatti, per  $n = 4$ , la fattorizzazione bi-trinomiale di *Ferrari-Euler*, Eq. (25), con le sue varianti, è l'unico procedimento risolvente noto di tipo puramente algebrico. Però, esso non fa ricorso al discriminante del 4° ordine. Poi, circa i gradi polinomiali successivi,  $n \geq 5$ , il *Teorema di Abel-Ruffini* esclude l'esistenza di metodi risolventi *generali esatti*, i.e., realizzabili con un numero *finito* di operazioni algebriche elementari, limitando definitivamente l'importanza *computazionale* del discriminante solo ai primi due casi elementari ( $n = 2, 3$ ). Per  $n \geq 4$ , il discriminante rimane semplicemente un parametro di controllo della possibile *multiplicità* in  $\mathbb{C}$  delle radici di  $P_{[n]}(x)$ .

### Definizione

Il *Risultante di Sylvester* (<sup>†</sup>) (brevemente: il *Sylvester*) di due polinomi di *una* variabile in forma completa,

$$A_{[m]}(x) := a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_j x^{m-j} + \dots + a_{m-1} x + a_m, \quad (36.1)$$

$$B_{[n]}(x) := b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_k x^{n-k} + \dots + b_{n-1} x + b_n, \quad (36.2)$$

con  $a_0 b_0 \neq 0$ , è il *determinante* (della matrice quadrata **S** di *Sylvester*, di rango  $m + n$ )

$$\det \mathbf{S}(A_{[m]}, B_{[n]}) := \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{m-1} & a_m & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{m-1} & a_m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{m-1} & a_m & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{m-1} & a_m \\ b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} & b_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} & b_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} & b_n & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_{n-1} & b_n \end{vmatrix}, \quad (37)$$

costruito traslando *a destra*, prima,  $n - 1$  volte, l'allineamento ordinato *per riga* degli  $m + 1$  coefficienti di  $A_{[m]}(x)$ , poi,  $m - 1$  volte, l'allineamento ordinato *per riga* degli  $n + 1$  coefficienti di  $B_{[n]}(x)$ . A ciascuna locazione rimanente, priva di coefficienti, viene assegnato il valore *zero*.

Vale il seguente

(<sup>†</sup>) JAMES JOSEPH (1814-1897). Al *cognome* originario, JOSEPH, fu aggiunto il 'middle name' SYLVESTER, per motivi burocratici di regolarizzazione anagrafica al momento dell'emigrazione con il fratello negli USA, dove erano obbligatori *due nomi* personali ufficiali.

**Teorema (di Sylvester)**

I polinomi  $A_{[m]}(x)$  e  $B_{[n]}(x)$  hanno *almeno* una radice comune sse  $\det \mathbf{S}(A_{[m]}, B_{[n]}) = 0$ . ▲

**Proposizione**

Sia  $f: x \mapsto P_{[n]}(x)$  la funzione polinomiale generale di una sola variabile e di grado  $n \geq 2$ .

Il discriminante dell'equazione  $P_{[n]}(x) = 0$  è *proporzionale* al Sylvester

$$\det \mathbf{S}(P_{[n]}, DP_{[n]}), \quad (38)$$

essendo  $(-1)^{n-1}a$  il fattore di proporzionalità,  $a$  il primo coefficiente di  $P_{[n]}(x)$  e  $D \equiv d/dx$  l'operatore di derivazione ordinaria vs.  $x$ . Necessariamente, il determinante di Sylvester (38) è quello associato a una matrice quadrata di rango  $2n - 1$ . □

Circa le espansioni generatrici dei discriminanti  $\Delta$ ,  $\Omega$  e  $\Xi$  dei polinomi di 2°, 3° e 4° grado di una sola variabile, si ottengono, rispettivamente:

- $P_{[2]}(x) = ax^2 + bx + c$   $DP_{[2]}(x) = 2ax + b$ ,

$$\det \mathbf{S}(P_{[2]}, DP_{[2]}) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & b & 0 \\ 0 & 2a & b \end{vmatrix}$$

$$= a(4ac - b^2) \equiv (-1)^{2-1}a(b^2 - 4ac) \equiv -a\Delta; \quad (39)$$

- $P_{[3]}(x) = ax^3 + bx^2 + cx + h$   $DP_{[3]}(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$$\det \mathbf{S}(P_{[3]}, DP_{[3]}) = \begin{vmatrix} a & b & c & h & 0 \\ 0 & a & b & c & h \\ 3a & 2b & c & 0 & 0 \\ 0 & 3a & 2b & c & 0 \\ 0 & 0 & 3a & 2b & c \end{vmatrix}$$

$$= a(27a^2h^2 - 18abch + 4ac^3 + 4b^3h - b^2c^2)$$

$$\equiv (-1)^{3-1}a\Omega \equiv a\Omega; \quad (40)$$

- $P_{[4]}(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + hx + k$   $DP_{[4]}(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + h$

$$\det \mathbf{S}(P_{[4]}, DP_{[4]}) = \begin{vmatrix} a & b & c & h & k & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & h & k & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c & h & k \\ 4a & 3b & 2c & h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4a & 3b & 2c & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4a & 3b & 2c & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4a & 3b & 2c & h \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= a(256a^3k^3 - 192a^2bhk^2 - 128a^2c^2k^2 + 144a^2ch^2k - \downarrow \\
 &\quad \downarrow - 27a^2h^4 + 144ab^2ck^2 - 6ab^2h^2k - 80abc^2hk + \downarrow \\
 &\quad \downarrow + 16ac^4k + 18abch^3 - 4ac^3h^2 - 27b^4k^2 + \downarrow \\
 &\quad \downarrow + 18b^3chk - 4b^2c^3k - 4b^3h^3 + b^2c^2h^2) \\
 &\equiv (-1)^{4-1} a \mathcal{E} \equiv -a \mathcal{E}. \tag{41}
 \end{aligned}$$

□

In alcune circostanze, può risultare più conveniente operare sulle rappresentazioni *moniche* dei polinomi generali (34.1) e (34.2):

$$A_{[m]}(x) := a_0(x^m + \alpha_1 x^{m-1} + \dots + \alpha_j x^{m-j} + \dots + \alpha_{m-1} x + \alpha_m) \equiv a_0 \bar{A}_{[m]}(x), \tag{42.1}$$

$$B_{[n]}(x) := b_0(x^n + \beta_1 x^{n-1} + \dots + \beta_k x^{n-k} + \dots + \beta_{n-1} x + \beta_n) \equiv b_0 \bar{B}_{[n]}(x), \tag{42.2}$$

dove,  $\alpha_j \equiv a_j/a_0$  e  $\beta_k \equiv b_k/b_0$ . Quindi, osservato che, nel *Sylvester* (37), la permutazione degli  $m+1$  coefficienti ordinati di  $A_{[m]}(x)$  avviene nelle prime  $n$  righe mentre quella della sequenza degli  $n+1$  coefficienti ordinati di  $B_{[n]}(x)$  occupa le  $m$  righe successive, ricordando la proprietà, per la quale, *moltiplicando per  $\lambda$  gli elementi di una riga\columna di un determinante, questo resta moltiplicato per  $\lambda$* , si scrive

$$\det \mathbf{S}(A_{[m]}, B_{[n]}) := a_0^n b_0^m \left( \begin{array}{cccccccccc}
 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{m-1} & \alpha_m & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{m-1} & \alpha_m & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{m-1} & \alpha_m & 0 \\
 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_{m-1} & \alpha_m \\
 1 & \beta_1 & \dots & \beta_{n-1} & \beta_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 1 & \beta_1 & \dots & \beta_{n-1} & \beta_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \beta_1 & \dots & \beta_{n-1} & \beta_n & 0 \\
 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \beta_1 & \dots & \beta_{n-1} & \beta_n
 \end{array} \right), \tag{43}$$

i.e., in forma sintetica,

$$\det \mathbf{S}(A_{[m]}, B_{[n]}) \equiv a_0^n b_0^m \det \mathbf{S}(\bar{A}_{[m]}, \bar{B}_{[n]}). \tag{43.1}$$

Il *Sylvester*

$$\det \mathbf{S}(\bar{A}_{[m]}, \bar{B}_{[n]}) := \frac{1}{a_0^n b_0^m} \det \mathbf{S}(A_{[m]}, B_{[n]}). \tag{44}$$

è detto in *rappresentazione monica totale* vs. quella del  $\det \mathbf{S}(A_{[m]}, B_{[n]})$ .

Pertanto, dalle Eq.i (36) e (42), è immediato determinare la *rappresentazione monica totale* del discriminante dell'equazione  $P_{[n]}(x) = 0$ . In questa,  $a_0 \equiv a$  è il primo coefficiente di  $P_{[n]}(x)$  mentre il primo coefficiente di  $DP_{[n]}(x)$  è  $b_0 \equiv na$ . Poiché, dall'Eq. (42.1), risulta

$$\det \mathbf{S}(P_{[n]}, DP_{[n]}) = n^n a^{2n-1} \det \mathbf{S}(\bar{P}_{[n]}, D\bar{P}_{[n]}), \tag{45}$$



allora, e.g., combinando le Eq.i (45), (43) e (41), si calcola in modo specifico ed esplicito

$$\det \mathbf{S}(P_{[4]}, DP_{[4]}) := 4^4 a^7 \begin{vmatrix} 1 & b/a & c/a & h/a & k/a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b/a & c/a & h/a & k/a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b/a & c/a & h/a & k/a \\ 1 & 3b/4a & c/2a & h/4a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3b/4a & c/2a & h/4a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3b/4a & c/2a & h/4a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3b/4a & c/2a & h/4a \end{vmatrix}$$

$$\equiv 256 a^7 \det \mathbf{S}(\bar{P}_{[4]}, D\bar{P}_{[4]}).$$

Così, per i gradi polinomiali 2°, 3° e, 4°, le Eq.i (39), (40) e (41) posseggono le rappresentazioni *totalmente normalizzate* rispettive seguenti:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{S}(\bar{P}_{[2]}, D\bar{P}_{[2]}) &= (4ac - b^2)/(4a^2) \\ &\equiv -\Delta/(4a^2), \end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned} \det \mathbf{S}(\bar{P}_{[3]}, D\bar{P}_{[3]}) &= (27a^2h^2 - 18abch + 4ac^3 + 4b^3h - b^2c^2)/(27a^4) \\ &\equiv \Omega/(27a^4), \end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned} \det \mathbf{S}(\bar{P}_{[4]}, D\bar{P}_{[4]}) &= (256a^3k^3 - 192a^2bhk^2 - 128a^2c^2k^2 + 144a^2ch^2k - \downarrow \\ &\quad \downarrow - 27a^2h^4 + 144ab^2ck^2 - 6ab^2h^2k - 80abc^2hk + \downarrow \\ &\quad \downarrow + 16ac^4k + 18abch^3 - 4ac^3h^2 - 27b^4k^2 + \downarrow \\ &\quad \downarrow + 18b^3chk - 4b^2c^3k - 4b^3h^3 + b^2c^2h^2)/(256a^6) \\ &\equiv -\Xi/(256a^6). \end{aligned} \tag{48}$$

■



James Joseph Sylvester (1814-1897)

## APPENDICE

### Il problema generale del calcolo delle radici di un polinomio di una variabile

Il problema generale della determinazione delle radici di un polinomio a coefficienti in  $\mathbb{C}$  di una variabile è di interesse sia teorico che, soprattutto, applicativo. È quasi superfluo ricordare la varietà sterminata di problemi e modelli matematici, la cui analisi qualitativa e/o quantitativa richiede la conoscenza di quei particolari valori della variabile indipendente che rendono *nullo* il valore di un polinomio.

D'altra parte, il *Teorema Fondamentale dell'Algebra*, pur asserendo l'*esistenza* di  $N$  radici in  $\mathbb{C}$  per ogni polinomio di grado  $N$ , *non ne indica*, però, alcun procedimento generale di calcolo.

Dal 17° secolo, appaiono definitivamente stabiliti algoritmi *generali*, algebrici o goniometrici, per la determinazione delle radici di polinomi in  $\mathbb{C}$  di 1°, 2°, 3° e 4° grado. Tali algoritmi sono costituiti da un numero *finito* di sei operazioni algebriche formali sui *coefficienti polinomiali*, sia *dirette* (addizione, moltiplicazione ed elevamento a potenza *intera positiva*) che *inverse*, rispettivamente, (sottrazione, divisione ed elevamento a potenza *razionale reciproca dell'intera positiva* (estrazione di radice)).

Invece, per quanto riguarda i polinomi di grado  $N > 4$ , non sono noti algoritmi *algebrici generali* di fattorizzazione *chiusa* di alcun tipo – semplicemente – perché *non possono esistere*. Infatti,

#### Teorema (di Abel-Ruffini)

Non è realizzabile alcun procedimento *generale* di determinazione delle radici di un polinomio di grado  $N > 4$  in  $\mathbb{C}$  eseguendo un numero *finito* di operazioni algebriche formali ordinarie sui suoi coefficienti. ▲

□

RUFFINI (PAOLO, 1765-1822), scoprendolo, tentò la prima dimostrazione del teorema nel 1799 ma la rese nota solo nel 1813. Essa, però, pur ricevendo scarsa attenzione per alcune lacune formali, conteneva un approccio innovativo per l'epoca perché introduceva l'applicazione di ciò che, nei termini attuali della *Teoria dei Gruppi di GALOIS* (ÉVARISTE, 1811-1832), viene definito *gruppo di permutazione*. Peraltro, LAGRANGE (JOSEPH LOUIS, 1736-1813) aveva scoperto che una *certa* classe di polinomi di 5° grado è fattorizzabile mediante un polinomio risolvente opportuno di 6° grado. Oggi, tale risultato è deducibile dalla *Teoria dei Gruppi di Galois*; precisamente, vale il seguente

#### Teorema

(e.g., v.: BAUMSLAG, B. - CHANDLER, B., *Group Theory*, SCHAUM'S OUTLINE SERIES, MCGRAW-HILL, p. 158-174)

Un polinomio può essere fattorizzato completamente per via algebrica forma sse il *gruppo di Galois* a cui appartiene è *risolvibile*. Tutti i polinomi di grado  $N \leq 4$  sono *sempre* fattorizzabili formalmente per via algebrica mentre, i polinomi di grado  $N \geq 5$ , *non sempre* posseggono fattorizzazioni algebricamente *chiuso*, essendo i *gruppi simmetrici* polinomiali  $S_2$ ,  $S_3$  e  $S_4$  *risolvibili* mentre  $S_N$  è *non-risolvibile* per  $N \geq 5$ . ▲

Nota: L'insieme degli  $N$  coefficienti e delle  $N$  radici di un polinomio in forma *normale* (i.e., con  $a_0 = 1$ ) di grado  $N$  su un campo *minimale* opportuno  $\mathcal{F}_N \subset \mathbb{C}$  costituisce un gruppo *automorfo simmetrico*  $S_N$  di grado  $N$ .

Ufficialmente, il *Teorema di Abel-Ruffini* è attribuito ad ABEL (NIELS HENRIK, 1802-1829), che ne fornì una dimostrazione completa nel 1824. Il suo enunciato viene citato, talvolta, in modo un po' fuorviante: esso *non* asserisce che le radici di un polinomio di grado  $N \geq 5$  non esistono perché non sono determinabili: infatti, il *Teorema Fondamentale dell'Algebra* garantisce l'esistenza in  $\mathbb{C}$  di *qualsiasi* numero  $N (\geq 5)$  di radici. Ora, se alcune radici polinomiali non sono rappresentabili in forma algebrica *chiusa* (e.g., mediante radicali), esse, in ogni caso, sono *sempre* rappresentabili in forma *numerica*, con precisione *arbitraria*, e.g., con i metodi di *Newton-Raphson* o di *Laguerre*. Comunque, è ovvio che alcuni polinomi (o classi di polinomi) di grado  $N \geq 5$  sono fattorizzabili *algebricamente*. Infatti, con un raccoglimento evidente, si trova che

$$x^5 - x^4 - x + 1 = (x^4 - 1)(x - 1) \equiv (x^2 + 1)(x^2 - 1)(x - 1) = (x + i)(x - i)(x + 1)(x - 1)^2$$

mentre, l'unica rappresentazione fattorizzata massimale possibile in  $\mathbb{R}$  del polinomio

$$x^5 - x + 1 \approx (x + 1.1673)(x^2 - 1.5298x + 0.7093)(x^2 + 0.3625x + 1.2078),$$

la cui *esistenza*, va ribadito, è garantita dal *Teorema Fondamentale dell'Algebra*, risulta non per via algebrica (formale) 'esatta' ma *unicamente* per via *numerica*, con i coefficienti arbitrariamente ma inevitabilmente *approssimati* (<sup>†</sup>).

Comunque, poiché, nella sostanza *applicativa*, la determinazione delle radici in rappresentazione *numerica* equivale a quella della loro rappresentazione *algebrica chiusa*, il *Teorema di Abel-Ruffini* si riferisce solo alla *forma* ma *non* all'esistenza *né* al numero delle radici.

■■■

---

(<sup>†</sup>) Un accenno, con alcuni esempi, alla rappresentazione fattorizzata *chiusa*, mediante radicali, per la classe di polinomi in  $\mathbb{R}$  di 5° grado  $x \mapsto P_{(5)}(x) \equiv x^5 + px + q$ , con  $\{p, q\} \subset \mathbb{Q}$  (Lagrange fu il primo a studiarla), si trova, e.g., in:

ZWILLINGER, D., *STANDARD MATHEMATICAL TABLES and FORMULAE*, 33<sup>rd</sup> ED., P. 73-75, CRC Press (2018).